

# RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ

## Éléments de solution de l'épreuve finale de 2010

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

Dans ces éléments de solution, nous proposons, pour chaque problème, au moins une réponse dont la démarche est accessible aux élèves.

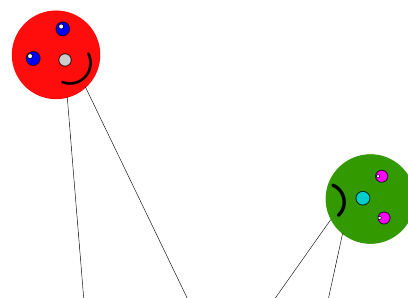
## 1 Distance sans tache

### 1.1 Énoncé

Céline a tracé deux droites sécantes, puis deux autres droites sécantes également.

Elle a caché les deux points d'intersection par des gommettes.

Déterminez la distance entre ces deux points, en ne traçant rien sur les gommettes. Expliquez votre démarche.



### 1.2 Éléments de solution

#### 1.2.1 Première méthode

Les couples de droites se coupent en A et en B.

On note O, S et U les points d'intersection des différentes droites comme l'indique le dessin.

Soit M le milieu de [OS] et N le milieu de [OU]. La parallèle à (BU) passant par N coupe (OB) en T.

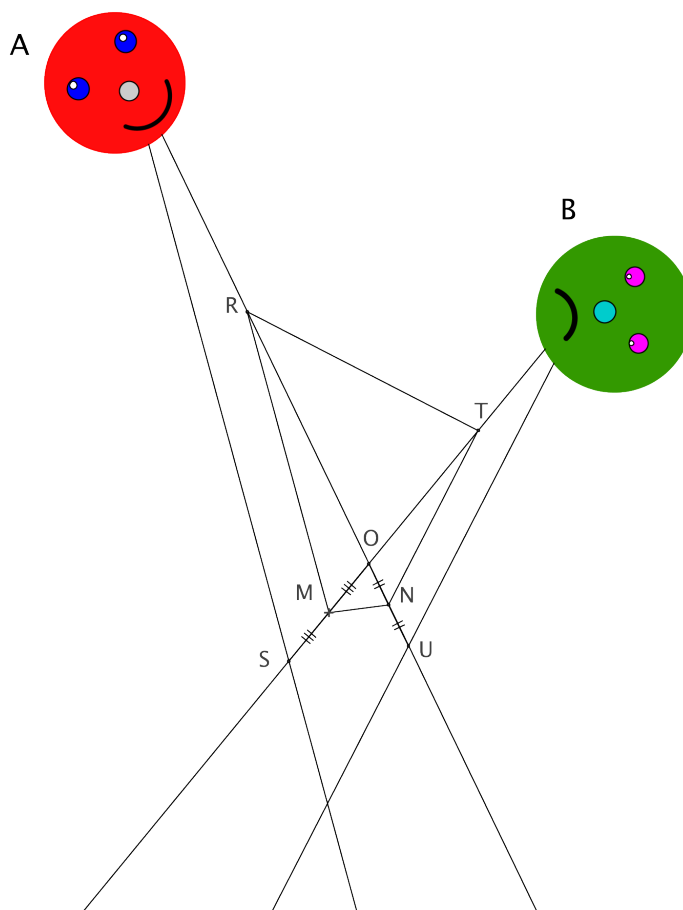
Comme N est le milieu de [OU], alors T est le milieu de [OB] d'après le théorème des milieux.

La parallèle à (AS) passant par M coupe (OA) en R.

De même, comme M est le milieu de [OS], alors R est le milieu de [OA].

Dans le triangle OAB, on a donc :

**la distance entre A et B est  $2RT$ .**



### 1.2.2 Deuxième méthode : en utilisant une symétrie centrale.

Appelons  $(d_1)$  et  $(d_2)$  les droites qui se coupent en A sous la gommette rouge de gauche.

De même, appelons  $(d_3)$  et  $(d_4)$  les droites qui se coupent en B sous la gommette verte de droite.

Soit O le point d'intersection des droites  $(d_2)$  et  $(d_3)$ .

On considère la symétrie de centre O.

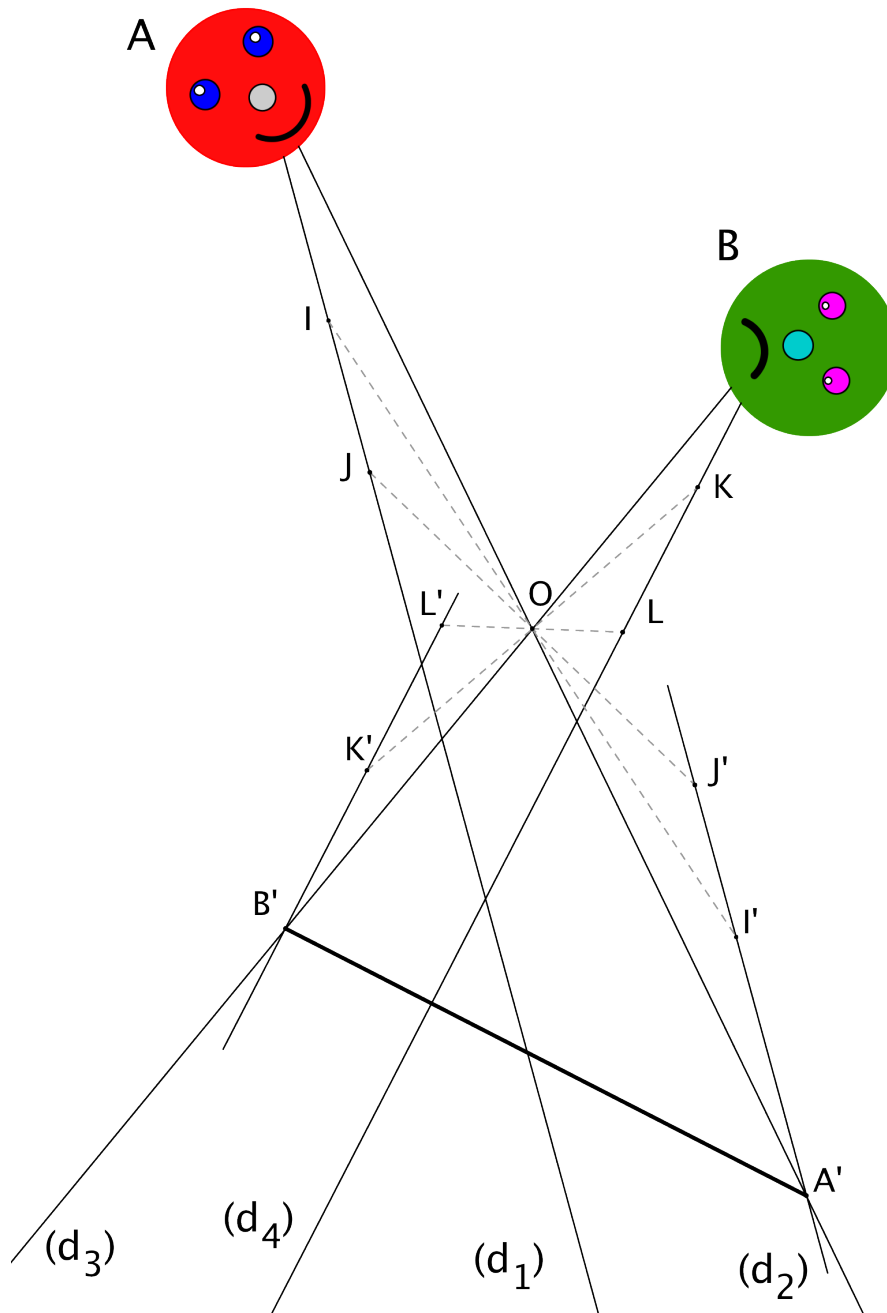
On veut construire l'image de  $(d_1)$  par cette symétrie. Pour cela, on place deux points I et J sur  $(d_1)$  et on construit leurs symétriques respectifs I' et J'.

La droite symétrique de  $(d_2)$  est elle-même.

Les droites  $(d_2)$  et (I'J') se coupent en A', symétrique de A par rapport à O.

On refait la même construction avec deux points K et L de  $(d_4)$  pour obtenir B', symétrique de B par rapport à O.

La symétrie centrale conservant les longueurs ; la distance de A à B est celle de A' à B' .



### 1.2.3 Troisième méthode : en utilisant une symétrie axiale

Appelons  $(d_1)$  et  $(d_2)$  les droites qui se coupent en A sous la gommette rouge de gauche.

De même, appelons  $(d_3)$  et  $(d_4)$  les droites qui se coupent en B sous la gommette verte de droite.

Soit O le point d'intersection des droites  $(d_2)$  et  $(d_3)$  et  $(\Delta)$  une droite passant par O.

On considère la symétrie d'axe  $(\Delta)$ .

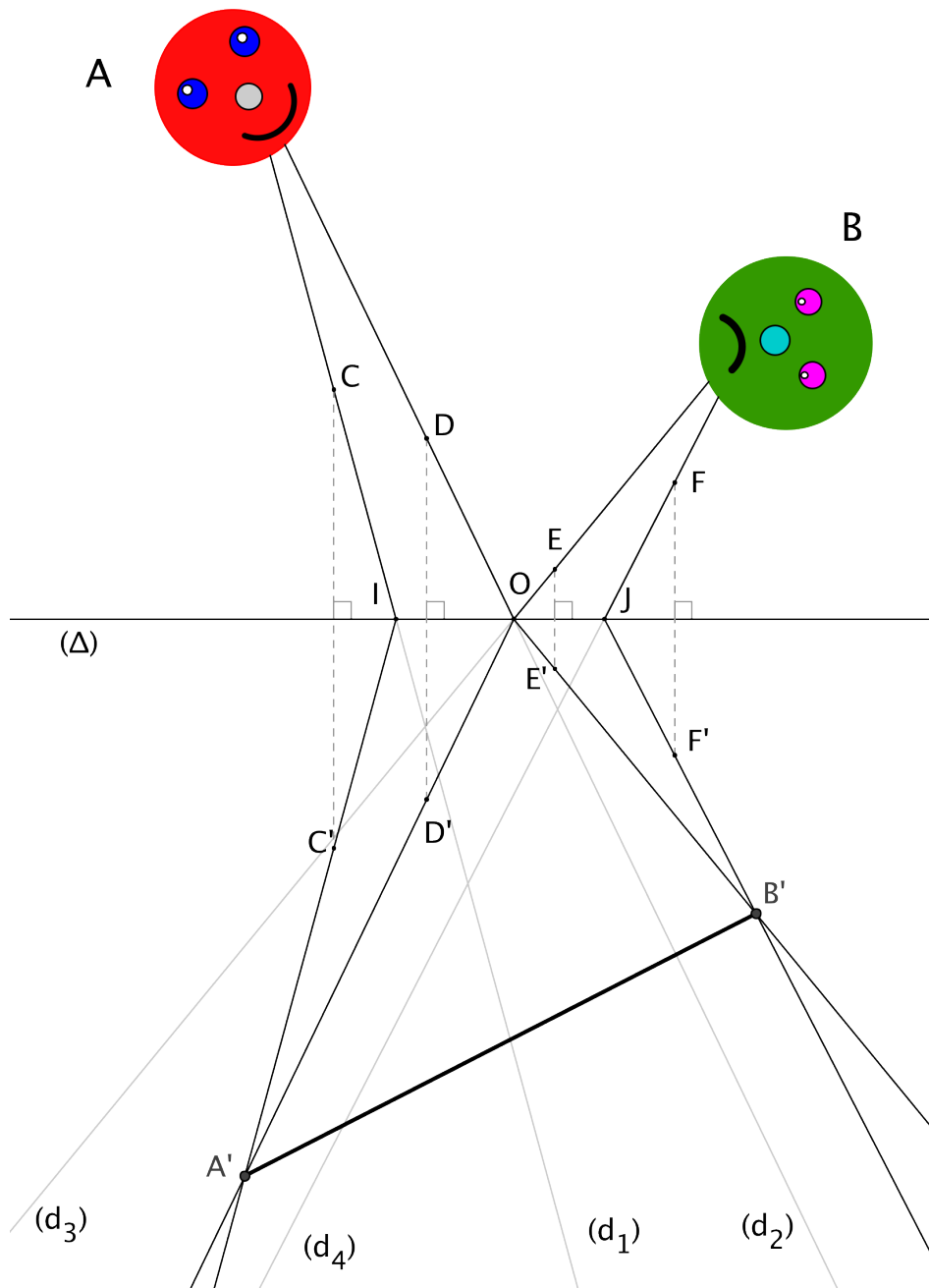
On veut construire les images de  $(d_1)$  et  $(d_2)$  par cette symétrie.

Pour cela, on place un point C sur  $(d_1)$ , un point D sur  $(d_2)$  et on construit leurs symétriques respectifs C' et D'.

Soit I le point d'intersection de  $(d_1)$  et de  $(\Delta)$ . Les points I et O sont leurs propres symétriques.

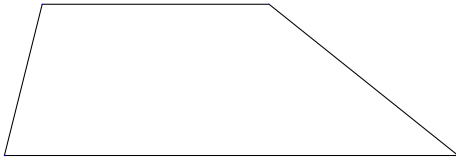
Les droites  $(IC')$  et  $(OD')$  se coupent en A', symétrique de A par rapport à  $(\Delta)$ . On refait la même construction pour  $(d_3)$  et  $(d_4)$  (voir figure) pour obtenir B', symétrique de B par rapport à  $(\Delta)$ .

La symétrie axiale conservant les longueurs ; **la distance de A à B est celle de A' à B' .**



## 2 Trapèze carré

### 2.1 Énoncé



Julie découpe un trapèze de grande base 12, de petite base 6 et de hauteur 4 (voir feuille réponse). A partir de ce trapèze et quelques coups de ciseaux, elle doit réaliser un puzzle carré.

**Proposez-lui une solution avec un minimum de découpes.**

**Justifiez votre proposition.**

### 2.2 Éléments de solution

Le trapèze et le carré ont des aires égales. L'aire du trapèze est égale à  $\frac{12+6}{2} \times 4 = 36$  unités d'aire. Il suffit de mettre en évidence un carré de 6 unités de côté.

#### 2.2.1 Première méthode

$AB = 6$ .

La perpendiculaire à  $(CD)$  passant par  $A$  coupe  $(CD)$  en  $I$ .

La perpendiculaire à  $(CD)$  passant par  $B$  coupe  $(CD)$  en  $J$ .

On coupe suivant  $[AI]$  et  $[BJ]$  (figure 1).

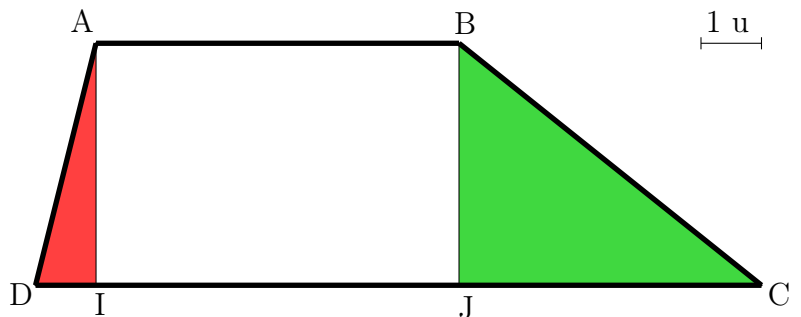


figure 1

Par demi-tour autour de  $I$ , le triangle  $ADI$  devient le triangle  $LKI$ , avec  $IK = ID$ .

Par demi-tour autour de  $J$ , le triangle  $BCJ$  devient le triangle  $MKJ$ , avec  $JK = JC$ .

On a  $JK + KI = 6$

$P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont les milieux respectifs des segments  $[IL]$ ,  $[KL]$ ,  $[KM]$  et  $[JS]$ .

On coupe suivant  $[PQ]$  et  $[RS]$ . (figure 2)

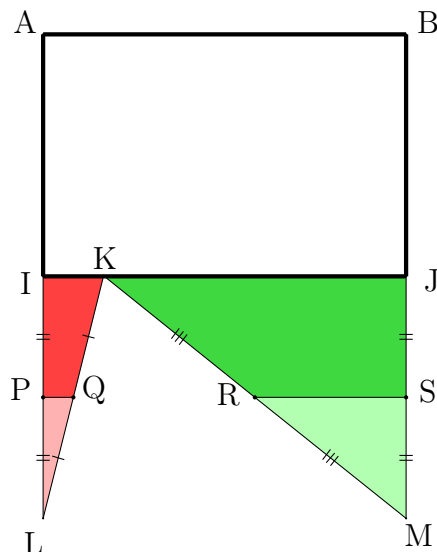


figure 2

Par demi-tour autour de Q, le triangle PQL devient le triangle HQK.

Par demi-tour autour de R, le triangle SRM devient le triangle HRK (figure 3).

Nous obtenons ainsi un carré ABSP de côté 6.

**Pour obtenir ce puzzle carré, le trapèze a été découpé avec quatre coups de ciseaux.**

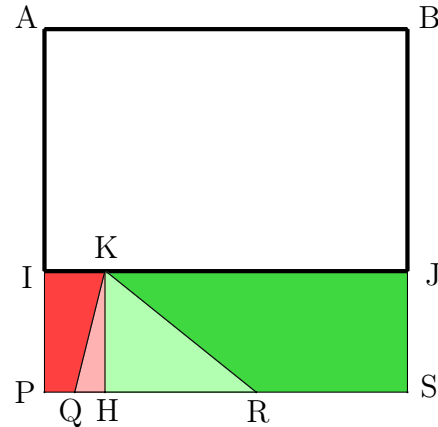


figure 3

### 2.2.2 Deuxième méthode

Soit I et J les milieux respectifs des deux côtés [AD] et [BC] du trapèze. La perpendiculaire à (CD) passant par I coupe (CD) en I'.

La perpendiculaire à (CD) passant par J coupe (CD) en J'.

On coupe suivant [II'] et [JJ'] (figure 1).

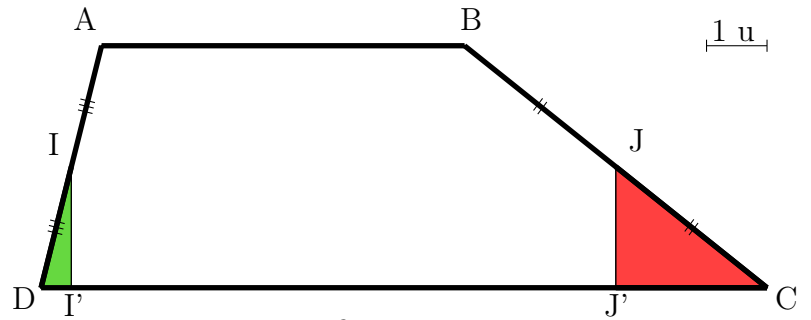


figure 1

Par demi-tour autour de I, le triangle IDI' devient le triangle IAA'.

Par demi-tour autour de J, le triangle JJJ' devient le triangle JBB' (figure 2).

E est le point de [AB] tel que EB' = 6.

F est le point de [I'J'] tel que FJ' = 6.

On obtient un rectangle A'B'J'T' de dimensions 4 et 9.

G est le milieu de [EF].

On coupe suivant [IG] et [EF]

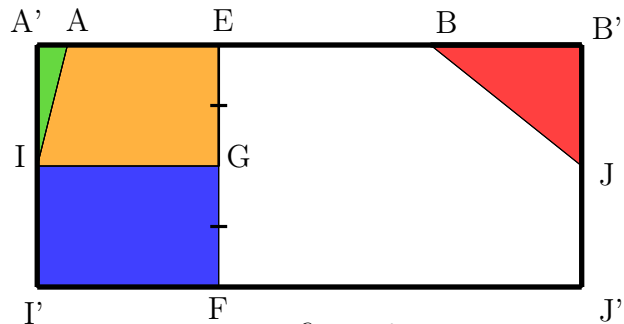


figure 2

Les deux rectangles EGIA' et IGFI' sont placés en dessous du rectangle EB'J'F et deviennent respectivement les rectangles J'GKH et FHKI' (figure 3).

Nous obtenons ainsi un carré  $EB'GI'$  de côté 6.

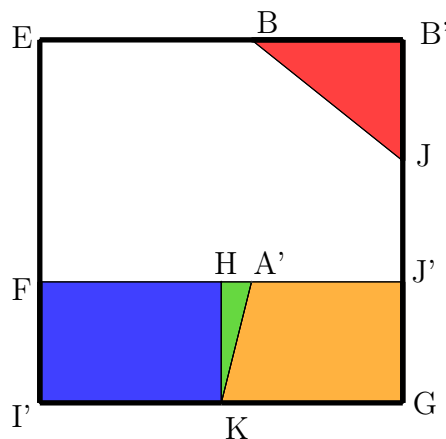


figure 3

Pour obtenir ce puzzle carré, le trapèze a été découpé avec quatre coups de ciseaux.

### 3 Empilement d'oranges

#### 3.1 Énoncé

Nortic vend des fruits et légumes sur le marché ; pour faire joli, il dispose ses oranges en «triangles superposés» comme l'indique la photo ci-contre.

Son cageot contient 231 oranges. Après quelques réflexions, Nortic débute son rangement afin de placer le maximum de fruits.

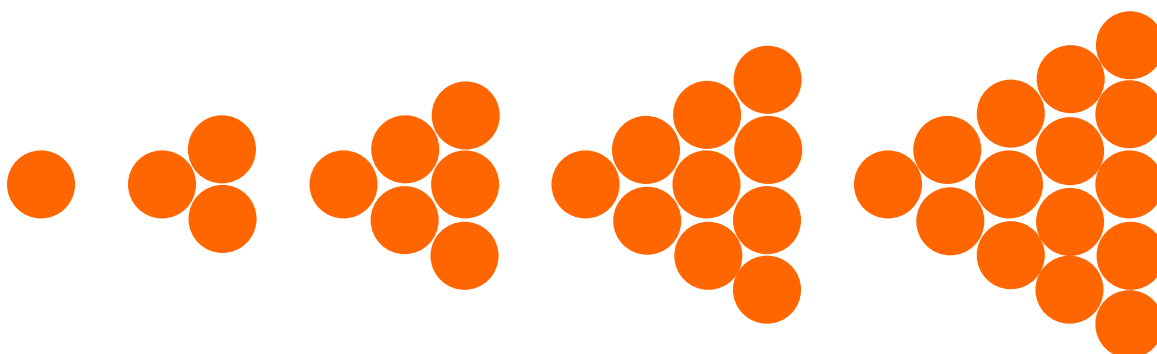


Déterminez le nombre d'oranges qu'il lui restera.

#### 3.2 Éléments de solution

Cet empilement d'oranges est une superposition de triangles équilatéraux.

De la gauche vers la droite sont représentés les différents niveaux, du dessus vers le bas.



Triangle 1 Triangle 2

Triangle 3

Triangle 4

Triangle 5

En supposant l'empilement terminé, déterminons le nombre d'oranges dans chaque niveau, en numérotant les triangles du haut vers le bas puis effectuons la somme de ces nombres.

Numéro du triangle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'oranges dans ce triangle	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Nombre total d'oranges	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286

En superposant 10 triangles, on a 220 oranges. En superposant 11 triangles, on a 286 oranges.

Sachant qu'il dispose de 231 oranges, il lui restera 11 oranges non empilées.

## 4 Pavage bicolore

### 4.1 Énoncé

Monsieur Dallos est furieux. Une de ses machines à découper les dalles de moquette est dérégulée et durant toute une journée, elle a découpé des dalles vertes de la forme ci-dessous au lieu des carrés habituels.

Les angles  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$  sont tout de même des angles droits et  $AD = 63$  cm,  $BD = 65$  cm et  $CD = 33$  cm.

Il doit se rendre aujourd'hui même au collège Champion pour remplacer les dalles de moquette du CDI. Il ne peut pas se permettre de jeter toutes ces dalles neuves.

Par chance, le CDI est une salle rectangulaire de 17,80 m sur 8,90 m et Monsieur Dallos ne manque pas d'imagination.

Il s'aperçoit qu'avec quatre de ces dalles, il peut former un grand carré troué d'un plus petit carré. Il a même trouvé deux assemblages de ce type mais un seul des deux lui permet de paver le CDI sans faire de découpe ni de superposition.

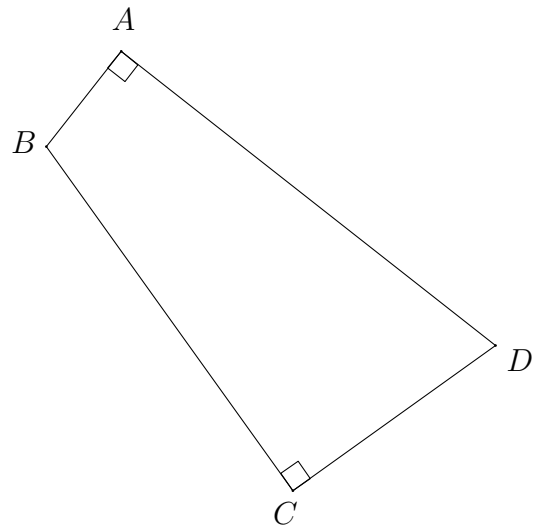


Schéma de la dalle

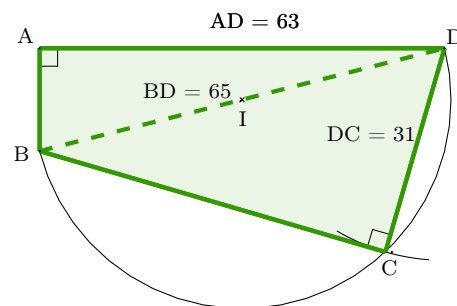
Il ne reste plus qu'à persuader le client que remplir les petits trous carrés d'une moquette rouge sera du plus bel effet.

**Déterminez l'aire totale de moquette rouge qu'il doit prévoir. Expliquer votre démarche.**

### 4.2 Éléments de solution

Il est recommandé de reproduire le quadrilatère à l'échelle  $\frac{1}{10}$  et en quatre exemplaires afin de constituer les deux puzzles.

La donnée des longueurs  $AD = 63$  cm,  $BD = 65$  cm et  $CD = 33$  cm incite à tracer la diagonale  $[BD]$  faisant ainsi apparaître deux triangles rectangles. Le premier,  $ABD$ , rectangle en  $A$ , peut être construit avec une règle graduée, un compas et une équerre.



La construction du triangle  $BDC$ , rectangle en  $C$  nécessite la construction du demi-cercle de diamètre  $[BD]$  et l'utilisation de la propriété :

« un triangle rectangle est inscrit dans le cercle dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle ».

L'application du théorème de Pythagore aux triangles ABD et BCD donne respectivement  $AB = 16$  cm et  $BC = 56$  cm. Il est possible de construire la figure uniquement avec le compas.

En utilisant convenablement la présence des angles droits, l'assemblage de quatre quadrilatères conduit aux deux figures ci-dessous.

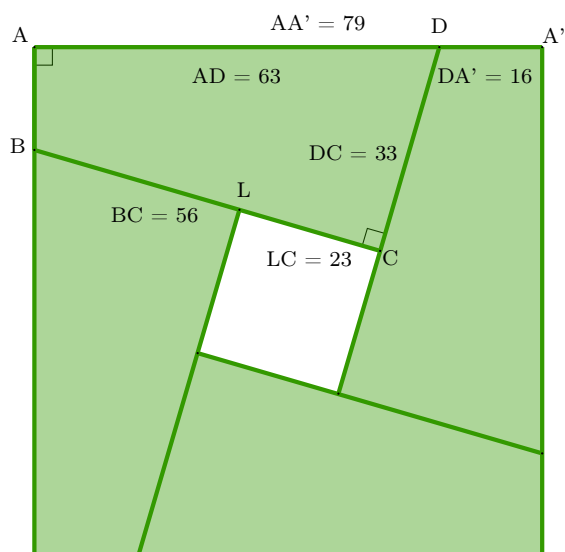


figure 1

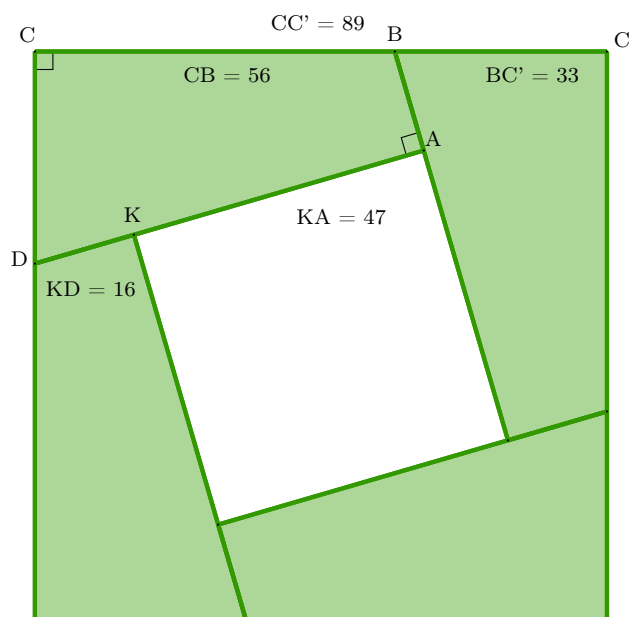


figure 2

A gauche, le grand carré a pour dimension 79 cm ( $16 + 63 = 79$ ) ; il est percé d'un petit carré de côté 23 cm ( $56 - 33 = 23$ ).

A droite, le grand carré a pour côté 89 cm ( $56 + 33$ ) ; il est percé d'un petit carré de côté 47 cm ( $63 - 16 = 47$ ).

Cherchons l'assemblage qui permet de recouvrir le CDI de superficie 17,80 m sur 8,90 m sans découpe ni recouvrement.

- Assemblage (figure 1) :  $17,8 \div 0,79 \approx 22,5$   
On ne peut donc pas aligner un nombre entier d'assemblages comme sur la figure 1 dans la longueur du CDI.
- Assemblage (figure 2) :  $17,8 \div 0,89 = 20$  et  $8,9 \div 0,89 = 10$   
On peut donc aligner 20 assemblages comme sur la figure 2 dans la longueur du CDI et 10 dans la largeur.

200 assemblages seront donc nécessaires.

Sachant que chacun de ces 200 assemblages est percé d'un carré du côté 0,47 m, il faudra compléter le dallage du CDI avec de la moquette rouge sur une surface égale à  $200 \times 0,47^2$  soit 44,18 m<sup>2</sup>.

**La surface totale de la moquette rouge a une aire de 44,18 m<sup>2</sup>.**



## 5 Embauche

### 5.1 Énoncé

L'entreprise *Toutaijeu* organise une journée d'embauche.

Trois catégories de postes sont à pourvoir :

- Manager d'équipe
- Testeur de jeux vidéo
- Laveur de carreaux

A leur arrivée, les candidats choisissent d'entrer dans une salle : la salle A ou la salle B.

60 % des candidats optent pour la salle A et, parmi eux, 15 % seront « testeurs ».

En tout, l'entreprise n'a besoin que de 18 % de « testeurs ».

L'entreprise dont les bâtiments sont en grande partie vitrés, a besoin de beaucoup de laveurs de carreaux. 55 % des candidats de la salle A et 70 % des candidats de la salle B seront « laveurs de carreaux ».

Pif et Paf se présentent comme candidats.

**Paf, voulant être « testeur », quelle salle doit-il choisir pour se donner le maximum de chance ?**

**Pif, voulant être « manager », quelle salle doit-il choisir pour se donner le maximum de chance ?**

### 5.2 Éléments de solution

La représentation du problème peut prendre différentes formes : un arbre, un tableau ou un quadrillage.

L'arbre et le premier tableau seront complétés dans l'ordre des calculs détaillés ci-dessous. Le codage reporté permet d'en suivre le déroulement. La réponse au problème posé ne nécessite pas d'effectuer tous les calculs de pourcentage, c'est pourquoi, certaines flèches ne seront pas renseignées sur l'arbre et certaines cases des tableaux ne seront pas complétées.

Les testeurs :

⊙ 15 % de 60 % de tous les candidats représentent 9 % de tous les candidats.

$\frac{15}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{9}{100}$  donc 9 % de tous les candidats seront *testeurs* et auront choisi la salle A.

⊕ Comme l'entreprise a besoin de 18 % de testeurs, 9 % des candidats seront *testeurs* et auront choisi la salle B.

Les laveurs de carreaux :

★ 55 % de 60 % de tous les candidats représentent 33 % de tous les candidats.

$\frac{55}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{33}{100}$  donc 33 % de tous les candidats seront *laveurs de carreaux* et auront choisi la salle A.

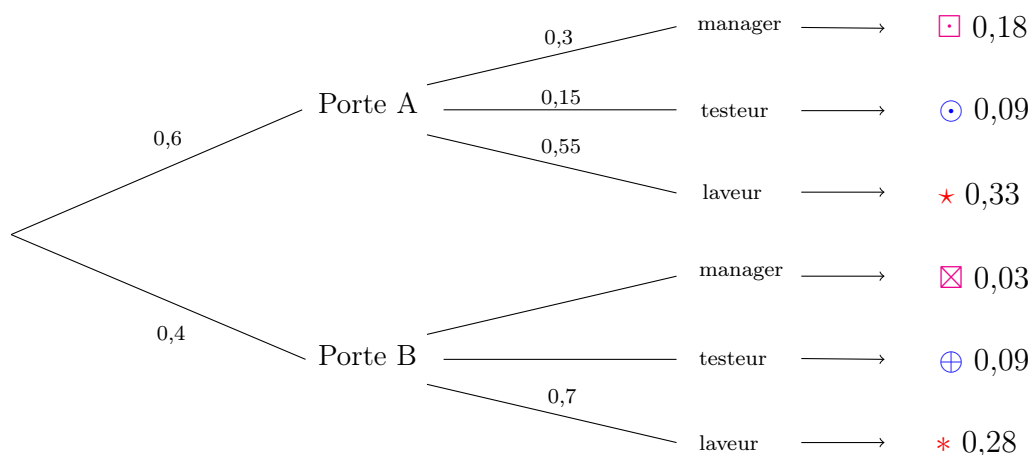
\* 70 % de 40 % de tous les candidats, soit 28 % de tous les candidats, seront *laveurs de carreaux* et auront choisi la salle B.

Les managers :

☐ Parmi les candidats ayant choisi la salle A, 70 % seront *testeurs* ou *laveurs de carreaux*. (15+55=70). Les 30 % restant seront *managers*. Or 30 % de 60 % représentent 18 % de tous les candidats .

☒ Pour déterminer le pourcentage de candidats *managers* et provenant de la salle B, on raisonne sur l'ensemble des candidats : 9+33+18+9+28= 97 donc 97 % des candidats ne sont pas *managers* en provenance de la salle B donc ces derniers représentent 3 % des candidats.

**Présentation des résultats à l'aide d'un arbre pondéré des probabilités**



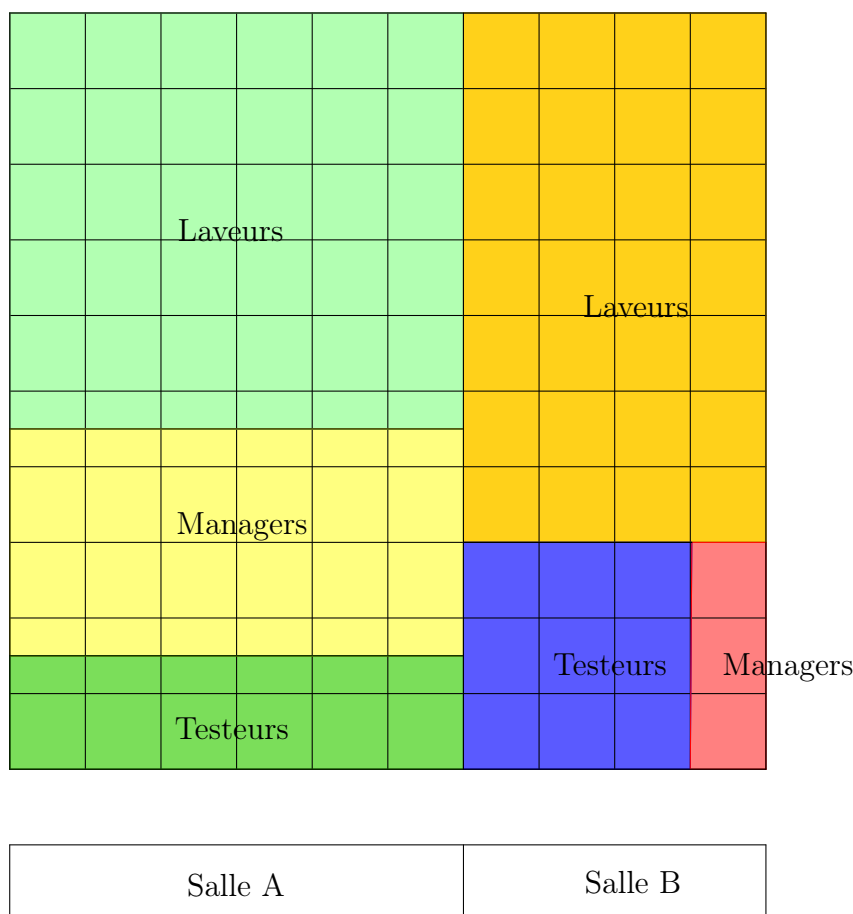
**Présentation des résultats à l'aide d'un tableau en y reportant les calculs précédents.**

	salle A	salle B	Total
Laveurs	$55\% \times 60\% = \mathbf{33\%} \star$	$70\% \times 40\% = \mathbf{28\%} \star$	
Testeurs	$15\% \times 60\% = \mathbf{9\%} \odot$	$18\% - 9\% = \mathbf{9\%} \oplus$	<b>18 %</b>
Managers	$30\% \times 60\% = \mathbf{18\%} \square$	$100\% - (9+28+9+ 33+18)\% = \mathbf{3\%} \boxtimes$	
Total	<b>60 %</b>	<b>40 %</b>	<b>100 %</b>

**Présentation des résultats à l'aide d'un tableau en rapportant l'effectif total à 100 et en raisonnant de manière additive sur les effectifs.**

	salle A	salle B	Total
Laveurs	$55\% \times 60 = \mathbf{33}$	$70\% \times 40 = \mathbf{28}$	
Testeurs	$15\% \times 60 = \mathbf{9}$	<b>9</b>	<b>18</b>
Managers	$60 - (33+9) = \mathbf{18}$	$40 - (28+9) = \mathbf{3}$	
Total	<b>60</b>	<b>40</b>	<b>100</b>

Présentation des résultats à l'aide d'un quadrillage comportant 100 carrés.



Pif a 18 % de chances d'être manager en choisissant la salle A alors qu'il n'en a que 3 % en choisissant la salle B.

Paf a la même chance d'être testeur (9 %) quelque soit la salle choisie.

## 6 Le nombre inconnu

## 6.1 Énoncé

Je suis un nombre constitué de six chiffres qui aiment garder bon ordre.

- Quand on me multiplie par 2, mes deux premiers chiffres passent en derniers ;

si  $a, b, c, d, e$  et  $f$  désignent des chiffres distincts,  $abcdef$  représente le nombre inconnu.

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ & & & & \times 2 & \\ \hline c & d & e & f & a & b \end{array}$$

- Quand on me multiplie par 3, seul mon premier chiffre passe en dernier ;
- Quand on me multiplie par 4, mes deux derniers chiffres passent en premier ;
- Quand on me multiplie par 5, mon dernier chiffre passe en premier ;
- Quand on me multiplie par 6, mes trois premiers chiffres deviennent les trois derniers.

Déterminez ce nombre en précisant votre méthode.

## 6.2 Éléments de solution.

Notons  $abcdef$  ce nombre  $N$  à six chiffres, où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  représentent chacun un chiffre entre 1 et 9.

Le produit, de  $N$  par 6, reste un nombre à six chiffres donc  $a = 1$ .

Quand on multiplie  $N$  par 3, seul le premier chiffre passe en dernier.

Le produit  $3 \times abcdef$  s'écrit  $bcdefa$ , avec  $a = 1$ . Or le seul produit de 3 par un entier compris entre 1 et 9 ayant pour dernier chiffre 1 est 21 ( $21 = 3 \times 7$ ), donc  $f = 7$ .

Quand on multiplie  $N$  par 5, le dernier chiffre passe en premier.

Le produit de  $1bcde7$  par 5 s'écrit  $71bcde$  et se termine par 5 donc  $e = 5$ .

Quand on multiplie  $N$  par 2, mes deux premiers chiffres passent en dernier.

Le produit de  $1bcd57$  par 2 s'écrit  $cd571b$  et se termine par 4 donc  $b = 4$ .

Quand on multiplie  $N$  par 4, mes deux derniers chiffres passent en premier.

Le produit de  $14cd57$  par 4 s'écrit  $5714cd$  et se termine par 8, donc  $d = 8$ .

Quand on multiplie  $N$  par 6, mes trois premiers chiffres passent en dernier.

Le produit de  $14c857$  par 6 s'écrit  $85714c$  et se termine par 2, donc  $c = 2$ .

Vérification :

- $142857 \times 3 = 428571$ , le premier chiffre passe en dernier.
- $142857 \times 4 = 571428$ , mes deux derniers chiffres passent en premier.
- $142857 \times 5 = 714285$ , mon dernier chiffre passe en premier.
- $142857 \times 6 = 857142$ , les trois premiers chiffres deviennent les trois derniers.

**Le nombre inconnu est 142857.**

## 7 Eoliennes

### 7.1 Énoncé

Dans la grande plaine d'ECASLA, deux éoliennes se situent de part et d'autre d'une frontière infranchissable.

Deux géomètres ont pour mission de calculer la distance entre ces deux éoliennes  $E$  et  $F$ , ils se trouvent tous les deux du côté de  $F$ .

Pour cela, ils disposent de plusieurs jalons et d'un décamètre. Les jalons permettent de repérer un point sur le terrain et de réaliser un alignement par visée.

Après plusieurs alignements et reports de longueur, ils réalisent leur mission.

**Déterminez, à votre tour, une méthode permettant de calculer la distance souhaitée à partir d'un schéma qu'ils vous ont laissé. Rédigez votre rapport.**



Deux repères étant placés, il est possible de placer un jalon tel que les trois points soient alignés. Plaçons un jalon, point  $A$ , tel les points  $E, A$  et  $F$  soient alignés. Plaçons un jalon en  $B$  dans la zone permise. A l'aide d'un décamètre, il est possible de placer un jalon  $C$  situé au milieu de  $[BF]$ .

Soit  $D$  un jalon, tel que  $C$  soit le milieu de  $[AD]$ .

Ainsi  $(BD)$  est parallèle à  $(EF)$ . Il est possible de placer un jalon  $G$  tel  $G$  appartienne à  $(BD)$  et  $E, C, G$  alignés.

Le quadrilatère  $EFGB$  a deux côtés parallèles,  $B$  étant le symétrique de  $F$ , alors  $G$  est le symétrique de  $E$ ;  $EFGB$  est alors un parallélogramme. On en déduit que les côtés  $[EF]$  et  $[BG]$  ont la même longueur.

En mesurant la distance de  $B$  à  $G$ , nous obtenons la distance entre les deux éoliennes.

**Conclusion :** La distance entre les deux éoliennes  $E$  et  $F$  est égale à la distance entre les jalons  $B$  et  $G$ .

**Rapport :** Voir le schéma précédent et son commentaire.

- Placer un jalon  $B$ , du même côté de la frontière que  $F$ , distinct de  $A$  et de  $F$ .
- Placer un jalon  $C$  à égale distance de  $B$  et de  $F$ , à l'aide du décamètre.
- Placer un jalon  $D$ , tel que  $A, C$  et  $D$  soient alignés et  $C$  milieu de  $A$  et  $D$ .
- Placer un jalon  $G$  tel que  $E, C$  et  $D$  soient alignés ainsi que  $B, D$  et  $G$ .
- Mesurer la distance  $d$  entre  $B$  et  $G$ .
- $BG$  est la distance entre les deux éoliennes.

### 7.2.2 Méthode 2

Les jalons permettent de repérer un point sur le terrain et de réaliser un alignement par visée. Le principe est de tracer une configuration de Thalès, en utilisant les points  $A, E$  et  $F$ .

Traçons un parallélogramme dont deux sommets consécutifs sont les points marqués par le jalon  $A$  et le point  $F$ .

Pour cela, traçons un point  $B$  dans la partie contenant  $A$  et  $F$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[BF]$  et  $J$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $I$ .

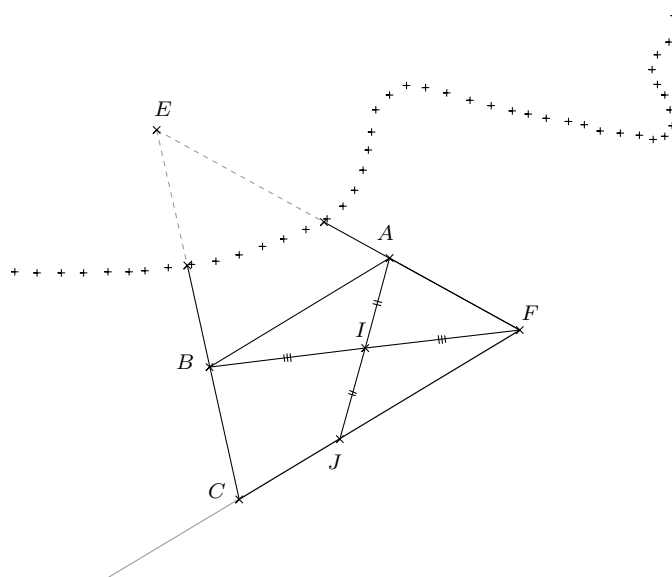
$AFJB$  est un parallélogramme, donc  $(AB)$  est parallèle à  $(FJ)$ .

Traçons le point  $C$  intersection de  $(EB)$  et  $(FJ)$ .

Nous obtenons une configuration de Thalès formée des triangles  $EAB$  et  $EFJ$  avec  $(AB)$  parallèle à  $(FC)$ .

Nous avons alors, les égalités :  $\frac{EA}{EF} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{FC}$

Les distances  $AF, AB$  et  $FC$  sont connues.



Utilisons l'égalité  $\frac{EA}{EF} = \frac{AB}{FC}$  avec  $EA = EF - AF$

Nous avons alors  $\frac{EF - AF}{EF} = \frac{AB}{FC}$  soit  $1 - \frac{AF}{EF} = \frac{AB}{FC}$  ce qui permet d'en déduire

$$\frac{FC - AB}{FC \times AF} = \frac{1}{EF} \quad \text{donc} \quad EF = \frac{FC \times AF}{FC - AB}$$

Nous connaissons  $FC$ ,  $AB$  et  $AF$  donc  $EF$  est calculable.

**Conclusion :**

la distance entre les deux éoliennes  $E$  et  $F$  est égale à  $EF = \frac{FC \times AF}{FC - AB}$  où  $FC$ ,  $AB$  et  $AF$

sont des longueurs mesurables sur le terrain en utilisant les jalons  $A$ ,  $B$ ,  $F$  et  $C$ .

**Rapport :** Voir le schéma précédent et son commentaire.

- Placer un jalon  $B$  distinct de  $A$  et de  $F$ , dans la zone de l'éolienne  $F$ .
- En utilisant le décamètre, placer un jalon  $I$  au milieu de  $[BF]$ .
- Placer le jalon  $J$  tel que  $I$  soit au milieu de  $[AJ]$ .
- Placer un jalon  $C$  tel que les jalons  $F$ ,  $J$  et  $C$  soient alignés ainsi que  $E$ ,  $B$ ,  $C$ .
- Mesurer les distances  $FC$ ,  $AC$  et  $AB$  à l'aide du décamètre.

Pour connaître la distance entre  $E$  et  $F$  il suffit d'appliquer la formule :  $EF = \frac{FC \times AF}{FC - AB}$

## 8 Nombres triangulaires et carrés

### 8.1 Énoncé

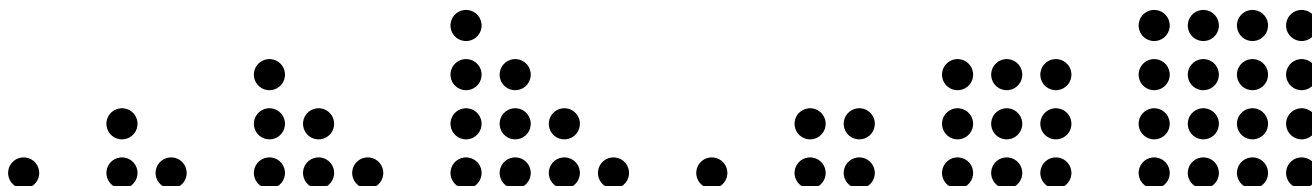
Si l'on dispose des jetons en forme de triangle, le nombre de jetons utilisés est dit triangulaire.

*Exemples :* 1, 3, 6, 10 sont les quatre premiers nombres triangulaires.

Si l'on dispose des jetons en forme de carré, le nombre de jetons utilisés est dit carré.

*Exemples :* 1, 4, 9, 16 sont les quatre premiers nombres carrés.

**Déterminez les quatre premiers nombres qui sont à la fois triangulaires et carrés.**



## 8.2 Éléments de solution

### 8.2.1

Les nombres triangulaires sont les nombres notés  $T_n$ ,  $n$  étant le nombre de jetons sur les côtés du triangle. On pose  $T_1=1$  on a  $T_2=3$ ,  $T_3=6 \dots T_n=T_{n-1} + n$ .

Soit  $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

On calcule avec méthode, les nombres triangulaires successifs, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, puis on repère parmi ces nombres ceux qui sont des carrés d'entiers.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$T_n$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190

$n$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$T_n$	210	231	253	376	300	325	351	378	406	435	465	496	528	561	595	630	666	703

$n$	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
$T_n$	741	780	820	861	903	946	990	1035	1081	1128	1176	1225	1275	1326	1378	1431	1485

Parmi les valeurs de  $T_n$ , pour  $n \leq 54$ , seules 1, 36 et 1225 sont des carrés parfaits, ce sont les trois plus petits car  $(T_n)$  est strictement croissante.

On peut remarquer que  $T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ . La programmation de cette expression permet de connaître la valeur de  $T_n$  lorsque l'on donne différentes valeurs à  $n$ .

Il est souhaitable de construire un algorithme de calcul de  $T_n$  en faisant varier la valeur de  $n$  avec un test pour reconnaître si  $T_n$  est un carré parfait.

**Ainsi, les nombres 1, 36, 1225 et 41616 sont les carrés de 1, 6, 35 et 204.**

**Ils ont respectivement pour rang 1, 8, 49 et 288**

### 8.2.2 Pour aller plus loin

Algorithme : calcul de  $T_n$  et impression des  $T_n$  qui sont des carrés parfaits.

#### Principe :

$T_n$  se calcule avec la définition récurrente  $T_1 = 1$  et  $T_n = T_{n-1} + n$  pour tout  $n \geq 2$ .

Un nombre est un carré parfait si et seulement si sa racine carrée est un entier, autrement dit si et seulement si la partie entière de la racine carrée est égale à cette racine carrée.

Le nombre 1 est un carré parfait,  $T_1 = 1$  répond donc à la question, sauf si on considère qu'on n'a pas un « vrai » triangle.

On notera  $N$  la variable entière,  $T$  le nombre triangulaire associé et  $K$  le compteur de carrés parfaits ( $K$  s'arrête à 5 si on décide de ne pas admettre 1 comme nombre triangulaire, sinon  $K$  s'arrête à 4).



## En langage naturel

$N \leftarrow 1$

$T \leftarrow 1$

$K \leftarrow 0$

Faire tant que  $K \leq 5$

– Si  $E(\sqrt{T}) = \sqrt{T}$ , alors afficher N, afficher T et  $K \leftarrow K+1$

–  $N \leftarrow N+1$

–  $T \leftarrow T+1$

Fin du tant que

## Programme Casio

$1 \rightarrow N$

$1 \rightarrow T$

$0 \rightarrow K$

While  $K \leq 5$

If  $\text{Intg}(\sqrt{T}) = \sqrt{T}$

Then N  $\blacktriangle$

T  $\blacktriangle$

Isz K

Ifend

$N+1 \rightarrow N$

$T + N \rightarrow T$

Whileend

## Programme TI

:  $1 \rightarrow N$

:  $1 \rightarrow T$

:  $0 \rightarrow K$

: While  $K \leq 5$

: If  $\text{floor}(\sqrt{T}) = \sqrt{T}$

: Then

: Disp "N=",N

: Disp "T=",T

:  $K+1 \rightarrow K$

: End If

:  $N+1 \rightarrow N$

:  $T + N \rightarrow T$

: End While

## Quelques remarques :

Les couples solutions  $(N,T) = (1,1)$  et  $(N,T) = (8,36)$  apparaissent instantanément.

Le couple solution  $(N,T) = (49,1225)$  apparaît 3 secondes après les précédents.

Le couple solution  $(N,T) = (288,41616)$  apparaît 10 secondes après le précédent.

Le couple solution  $(N,T) = (1681,1413721)$  apparaît 60 secondes après le précédent.

## Avec une feuille de tableur

En voici, ci-contre, un extrait

### Instructions :

Dans la cellule A3 :

=A2 + 1

Dans la cellule B3 :

=B2 + A3

	A	B	C	D
1	$n$	$T_n$	$T_n$ carré parfait	
2	1	1	oui	
3	2	3		
4	3	6		
5	$\vdots$			
	6	21		
8	7	28		
9	8	36	oui	
10	9	45		
11	$\vdots$			
49	48	1176		
50	49	1225	oui	
51	50	1275		
287	$\vdots$			
288	287	41328		
289	288	41616	oui	
29	289	41905		

Dans la cellule C2 : =SI(ENT(RACINE(B2))=RACINE(B2);"oui";"")

## Avec Algobox

```

1  VARIABLES
2    N EST_DU_TYPE NOMBRE
3    T EST_DU_TYPE NOMBRE
4    K EST_DU_TYPE NOMBRE
5    C EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7    N PREND_LA_VALEUR 1
8    T PREND_LA_VALEUR 1
9    K PREND_LA_VALEUR 0
10   TANT_QUE (K<=5) FAIRE
11     DEBUT_TANT_QUE
12       SI (floor(sqrt(T))==sqrt(T)) ALORS
13         DEBUT_SI
14           K PREND_LA_VALEUR K+1
15           C PREND_LA_VALEUR sqrt(T)
16           AFFICHER "le"
17           AFFICHER N
18           AFFICHER "ième nombre triangulaire"
19           AFFICHER T
20           AFFICHER "est le carré du nombre"
21           AFFICHER C
22         FIN_SI
23       N PREND_LA_VALEUR N+1
24       T PREND_LA_VALEUR T+N
25     FIN_TANT_QUE
26  FIN_ALGORITHME

```

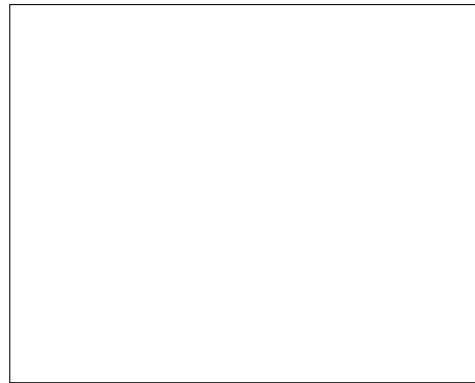
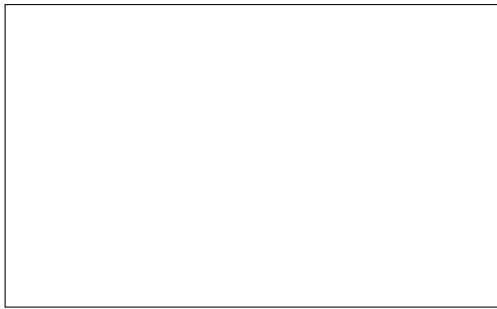
## 9 Somme de deux rectangles.

### 9.1 Énoncé

Voici deux rectangles. Le premier a pour largeur 4 et le deuxième a pour largeur 5.  
Les longueurs de ces deux rectangles sont inconnues et vous ne devez pas les mesurer.

1 u  
|-----|

Ce segment représente  
l'unité de longueur



**Construisez un rectangle dont l'aire est égale à la somme des aires des deux rectangles.  
Expliquez votre démarche.**

Compas, règle non graduée et équerre sont les seuls instruments autorisés.

### 9.2 Éléments de solution

Le problème est résolu si l'on peut construire un rectangle donné et dont un des côtés est donné.

#### 9.2.1 Première méthode : Situation où une dimension est commune aux deux rectangles

Lorsque les rectangles ont une dimension commune, il est possible de juxtaposer les deux côtés de même dimension, pour réaliser un rectangle dont l'aire est la somme des aires des deux rectangles. Ce n'est pas le cas proposé par les tracés.

*Construisons alors un tel rectangle en prenant une largeur égale à 4.*

Il s'agit de construire un rectangle de dimension  $l$  et  $L$  vérifiant la relation  $l \times L = 4 \times L_1 + 5 \times L_2$ . Pour cela, il suffit de donner à  $l$  une valeur, puis de construire un segment de longueur  $L$  vérifiant la relation. Dans ce cas, prenons  $l = 4$ .

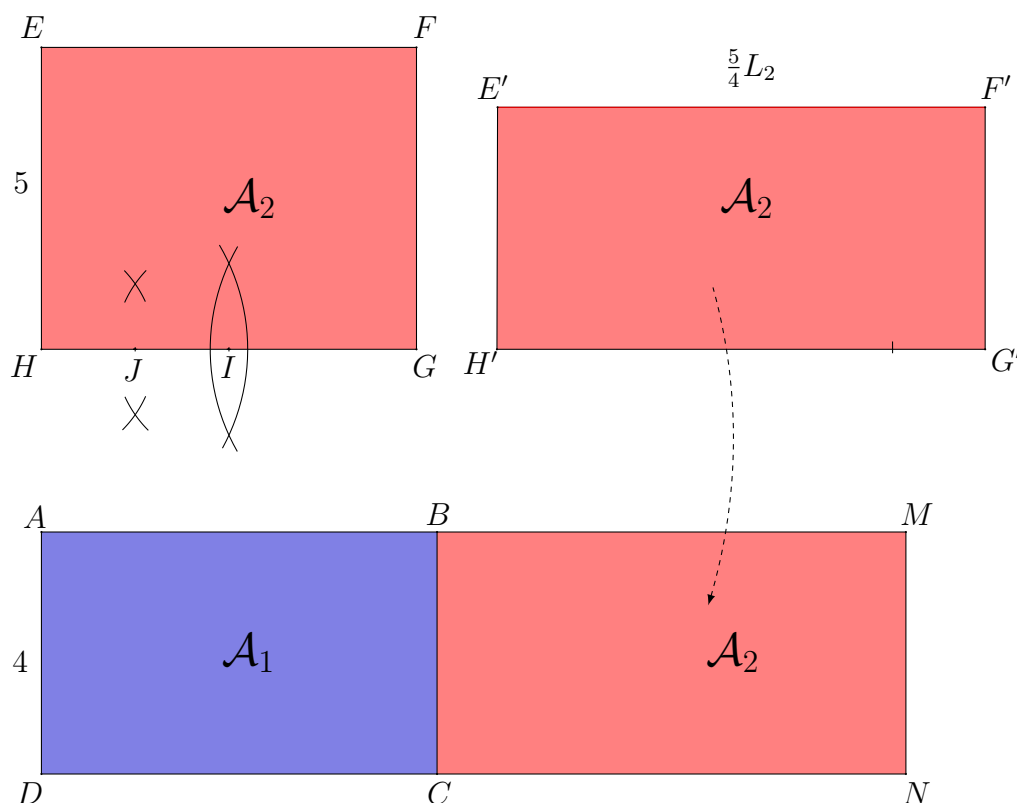
Soient  $ABCD$  le rectangle de dimensions 4 et  $L_1$  et  $EFGH$  le rectangle de dimensions 5 et  $L_2$ .  
Déterminons un rectangle de dimensions 4 et  $y$  de même aire que  $EFGH$ , ce qui se traduit par :

$$5 \times L_2 = 4 \times y \quad \text{d'où} \quad y = \frac{5 \times L_2}{4}$$

En divisant le côté de longueur  $L_2$  en quatre comme l'indique le dessin ci-dessous, il est possible d'obtenir un segment de longueur  $\frac{5 \times L_2}{4}$  et on a  $\frac{5 \times L_2}{4} = HG + HJ$

En utilisant les instruments autorisés, compas et règle non graduée, traçons un rectangle  $E'F'G'H'$  de côté 4 et  $\frac{5}{4}L_2$  et le rectangle  $ABCD$  de côté 4 et  $L_1$ . La juxtaposition des deux rectangles permet d'obtenir le rectangle souhaité.

Voir figures ci-dessous.



**Conclusion :** Le rectangle  $AMND$  est un rectangle dont l'aire est égale à la somme des aires des deux rectangles donnés.

### Variantes

- a. Choix de  $l = 1$ .

En utilisant une situation de Thalès, il est possible de partager le côté de dimension 4 en quatre segments de même longueur et celui de dimension 5 en cinq segments de même longueur.

Le rectangle dont les dimensions sont 1 et  $4L_1 + 5L_2$  est une solution au problème posé.

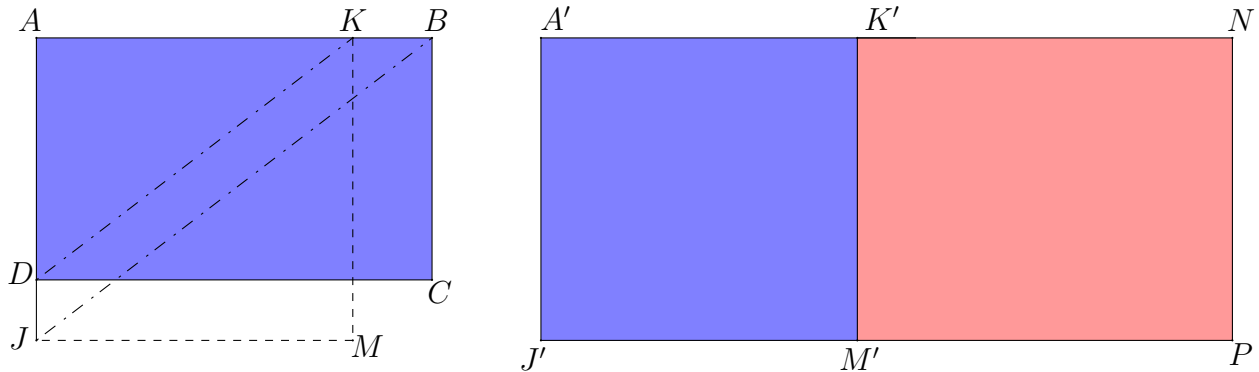
- b. Choix de  $l = 5$ .

Soit  $ABCD$  le rectangle de dimension 4 et  $L_1$ , construisons un rectangle de même aire dont une des dimensions est 5.

Plaçons le point  $J$  sur la demi droite  $[AD)$  tel que  $AJ = 5$ . Du point  $D$ , traçons la parallèle à  $(BJ)$ , cette droite coupe  $[AB]$  en  $K$ .

L'égalité  $\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AJ}$  s'écrit alors  $AK \times AJ = AB \times AD$ , ce qui permet d'affirmer que les deux rectangles  $ABCD$  et  $AKMJ$  ont la même aire.

Il suffit alors de juxtaposer le rectangle ainsi construit de côté 5 avec le rectangle donné de côté 5 par ce côté de même dimension.



**Conclusion :** Le rectangle  $A'NP'J'$  est un rectangle dont l'aire est la somme des aires des deux rectangles donnés.

### 9.2.2 Deuxième méthode

Superposons les deux rectangles  $ABCD$  et  $EFGH$  ( $E$  est confondu avec  $D$ ) comme l'indique la figure 1 ci-dessous,  $AD = 4$  et  $DG = 5$ .

Soit un point  $M$  entre  $C$  et  $F$ . Plaçons un point  $J$  tel que  $AJMD$  soit un rectangle et  $K$  tel que  $DMKH$  soit un rectangle.

Quelle position doit occuper le point  $J$  pour que les deux rectangles  $BJMC$  et  $MFGK$  aient la même aire ?

Ainsi le rectangle  $AJKH$  a pour aire la somme des aires des deux rectangles  $AJMD$  et  $DMKH$ .

Posons  $CM = x$ .

La condition  $aire(BJMC) = aire(MFGK)$  se traduit par l'équation  $4 \times x = 5 \times (FC - x)$ .

$$4 \times x = 5 \times (FC - x) \text{ est équivalent à } x = \frac{5 \times FC}{9}$$

Le tracé de la figure 2 permet d'obtenir un segment de longueur  $\frac{5 \times FC}{9}$

Avec  $OJ' = 9$ ,  $OI' = 5$  et  $J'K' = FC$ , le segment  $I'L$  a pour longueur  $\frac{5 \times FC}{9} = \frac{5 \times (L_2 - L_1)}{9}$

Ce qui permet de construire le point  $M$  entre  $C$  et  $F$  tel que  $DM = DC + CM = \frac{4}{9}L_1 + \frac{5}{9}L_2$ .

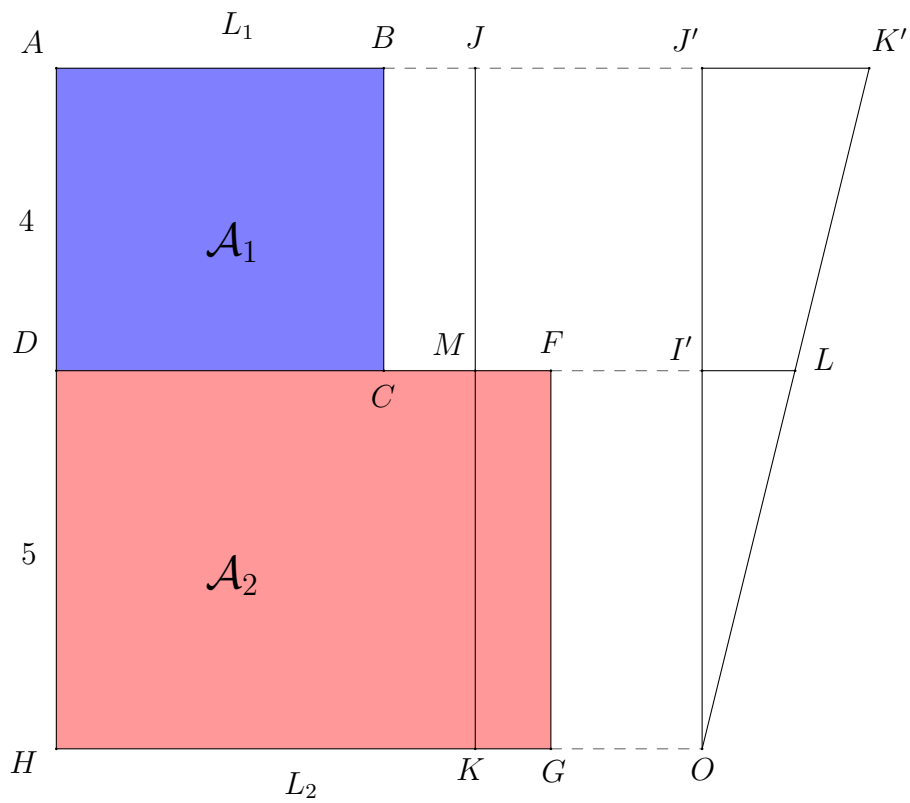
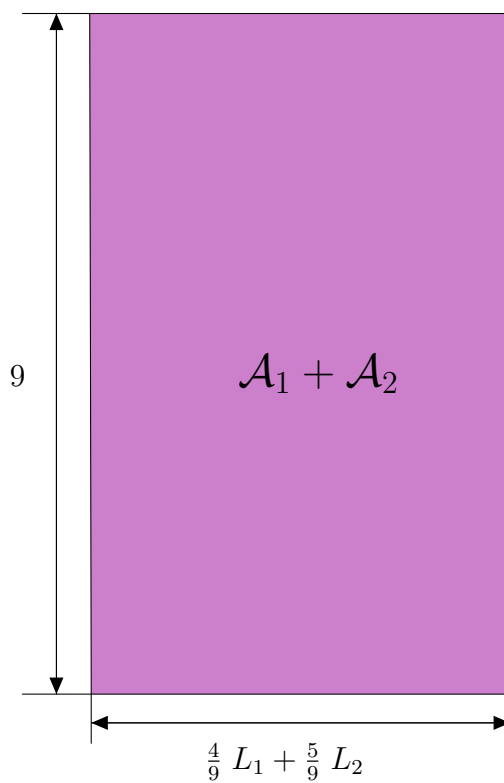


figure 1

figure 2

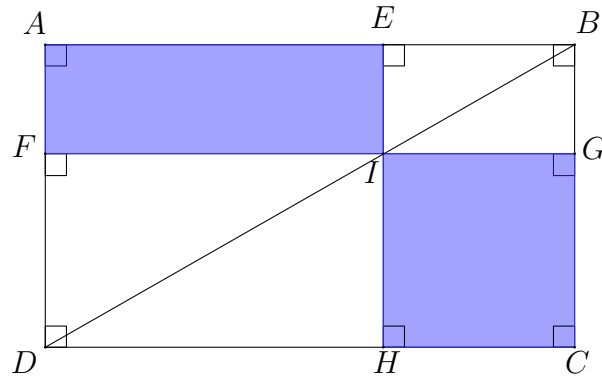
La construction du rectangle de dimension 9 et  $DC + I'L$  c'est-à-dire  $\frac{4L_1}{9} + \frac{5L_2}{9}$  est alors possible.



### 9.2.3 Troisième méthode

Il est possible d'utiliser directement une propriété de la configuration suivante.

L'aire du rectangle  $AEIF$  est égale à l'aire du rectangle  $IGCH$ , propriété qu'il est facile de démontrer (on pourra utiliser le fait que deux triangles symétriques par rapport à un point ont la même aire).



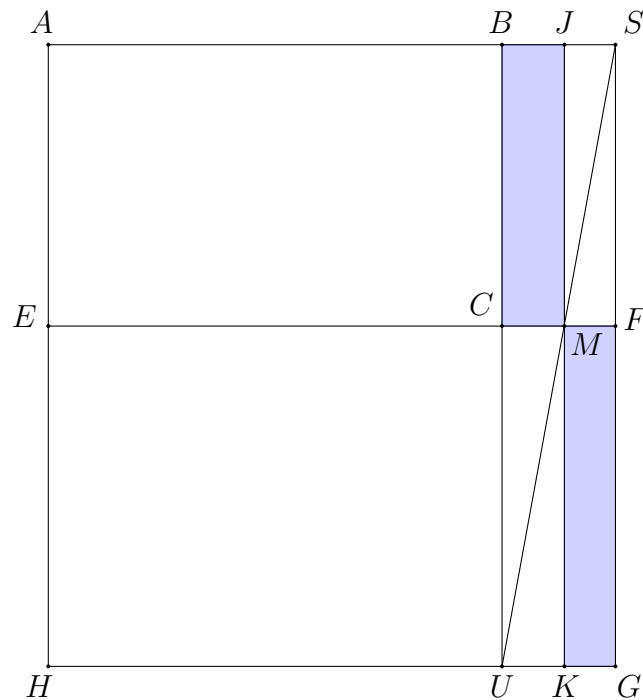
Retour au problème posé.

On superpose les deux rectangles donnés  $ABCD$  et  $EFGH$  (le point  $E$  étant confondu avec  $D$ ), puis on trace le rectangle  $AHGS$ .

Soit  $U$  le point d'intersection de  $(BC)$  et de  $(HG)$ .

La diagonale  $US$  du rectangle  $BSGU$  coupe  $[CF]$  en  $M$ . Les rectangles  $BJMC$  et  $FMKG$  ont la même aire.

Le rectangle  $AJKH$  est un rectangle cherché, c'est-à-dire que son aire est la somme des aires des deux rectangles donnés.



**Conclusion :** Le rectangle  $AJKH$  est un rectangle dont l'aire est égale à la somme des aires des deux rectangles donnés.

Comme le montre cette dernière méthode, ce problème se résout sans utiliser les valeurs numériques attribuées aux dimensions des rectangles donnés.

On aurait pu raisonner sans tenir compte des données numériques dans les autres méthodes, mais la rédaction aurait été plus compliquée.